RUMGEOMETRI-programmet D3GEO til TI-82 og TI-83

Af Frans Morville.

Programmet har menuer i to niveauer organiseret efter de oplysninger, der opgivet (kendte) og som skal bruges i beregninger. Overskrifterne (menu-punkterne) fortæller, hvad der skal indlæses.

1. Vektor,...

1. 2 Vektorer

Udskrives: Krydsprodukt, areal af parallelogram, prikprodukt, længde af hver af de to vektorer,
Vinkel mellem vektorerne, projektion af den første vektor på den anden.

2. Vektor+Plan

Indlæses: Vektor **a**, normalvektor **n=**(a,b,c) for planen
Udskrives: **a**' s projektion på planen.

3. n-vektor + Punkt

Indlæses:Normalvektor **n=**(a,b,c) for plan, punkt (x_0, y_0, z_0) i planen.
Udlæses: ligning på formen ax + by + cz + d = 0 for planen gennem (x_0, y_0, z_0) vinkelret på **n.**

4. 2 r-vektorer + Punkt

Indlæses: punkt (x_0, y_0, z_0) i planen, og to retningsvektorer for den
Udlæses: ligning på formen ax + by + cz + d = 0 for planen gennem (x_0, y_0, z_0) med de to angivne retningsvektorer.
Specialtilfælde: de to retningsvektorer parallelle.

2. Punkter alene

1. 2 punkter

Udskrives: (retnings)vektor $\overrightarrow{AB}$, afstand, midtpunkt.

2. 3 punkter

Udskrives: Vinkler, sider, normalvektor, areal af trekant, ligning for plan gennem punkterne.
Specialtilfælde: de tre punkter på linje.

1. Linjer, planer, punkter

1. Linje + Linje

Udskrives: afstand , punkter på fælles normal (ved vindskæve linjer).
Specialtilfælde: sammenfaldende linjer, parallelle linjer,
skærende linjer (skæringspunkt samt vinkel udlæses)

2. Linje + Plan

Udskrives: skæringspunkt, vinkel mellem plan og linje.
Specialtilfælde: Linje parallel med plan

3. Linje + Punkt

Udskrives: afstand, projektion af punktet på linjen, ligning for planen gennem linjen og punktet.
Specialtilfælde: punktet beliggende på linjen.

4. Plan + Plan

Udskrives: parameterfremstilling for skæringslinje, vinkel mellem planer.
Specialtilfælde: parallelle planer.

5. Plan + Punkt

Udskrives: afstand, projektion af punktet på planen

6. Plan (+akser)

Indlæses: ligningen for en plan.
Udskrives: planens skæringspunkt med x-aksen, med y-aksen og med z-aksen (hvis de findes)

4. Kugle,...

1. Ligning

Indlæses: koefficienterne a, b, c, d i ligningen $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
Udskrives: Centrum og radius (hvis muligt)

2. C + R + Linje

Indlæses: Centrum og radius for kugle, parameterfremstilling for linje.
Udskrives: Eventuelle skæringspunkter.

3. C + R + Plan

Indlæses: Centrum og radius for kugle, ligning for plan
Udskrives: radius og centrum for eventuel skærings-cirkel

MENUER OG INPUT

Programmet har menuer i to niveauer organiseret efter de oplysninger, der opgivet (kendte) i opgaven.
Først vælges mellem hovedpunkterne
1. Vektor, ...
2. Punkter alene
3. Linjer, planer, punkter
4. Kugle, ...

Dernæst vælges mere præcist, hvad der er kendt.
Man indtaster de kendte størrelser, og får udlæst en række oplysninger, der kan beregnes ud fra det indtastede. Ved opgaveløsning må man udvælge blandt de udskrevne beregningsresultater.

OUTPUT

En kort ledsagende tekst udskrives før hvert tal-resultat.
Beregningsmetoden angives heri ofte ved henvisning til en formel i formelsamlingen for det 3-årige forrløb til højniveau i matematik: (80) betyder formel 80 i denne formelsamling.
Ellers kan beregningsmetoderne findes i denne eksempelsamling, som er ordnet efter programmets menuer.
Hvis der under beregning af en afstand udskrives
$DIST^2$
5
betyder det, at kvadratet på afstanden er 5, dvs. at afstanden er $\sqrt{5}$
Ofte udskrives på denne måde (med X^2) kvadratet på resultatet i stedet for det ønskede resultat, eller inden det ønskede resultat, idet længder og arealer ofte er kvadratroden af hele eller rationale tal, når man som input angiver hele eller rationale tal.
Lommeregnerens tegnsæt tillader jo ikke matematisk korrekt udskrivning.
N kan f.eks. betyde |**n**|
AB kan betyde |AB| eller $\overrightarrow{AB}$ (se om resultatet er et tal eller har tre koordinater)
N.P1P2 kan betyde $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$ o.s.v.
Der henvises til beskrivelsen af de enkelte programafsnit for en nærmere forklaring.
I tilfælde af længere beregninger, der kræver mellemregninger, indledes ofte med en overskrift, på en ellers tom skærm, inden mellemresultater og slutresultat udskrives, f.eks. VINKEL:
Under menupunktet ”2 Vektorer” udskrives nogle mellemresultater ved beregning af vinkel og projektion. Under de øvrige menupunkter udskrives ikke netop disse mellemresultater.

BETJENING AF TASTATURET UNDER UDSKRIFT

Man kommer videre med (mellem)resultaterne med Enter-knappen.
Når der udskrives vektorer som resultat, ser de f. eks sådan ud:
{872/243, 542/243 , -786/243}

Sådanne resultater er udskrevet med ordren "Pause", hvilket betyder, at hvis man ikke kan se hele resultatet på skærm-linjen, kan man med højre-piletasten synliggøre det, der ligger længere ude. Det skal gøres inden man med Enter-tasten fremkalder de næste resultater.
Hvis man ønsker at afbryde en programkørsel, kan det gøres med On efterfulgt af Quit.
Trykker man Enter efter tilendebragt programkørsel, gentager Texas den sidst udførte ordre, d.v.s. D3GEO' s hovedmenu fremkommer igen.

LINJER

Der anvendes parameterfremstilling dvs. der ind-eller udlæses et fast punkt (x_0, y_0, z_0) og en retningsvektor (r_1, r_2, r_3). Ved indlæsning spørges i begge tilfælde efter X? Y? Og Z?
Koordinatakserne: x-aksen består af punkter (x,0,0) og er karakteriseret ved y=0 og z=0. I programmet kan følgende parameterfremstillinger bruges for de tre akser:

x-akse: (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,0,0)
y-akse: (x,y,z) = (0,0,0) + t(0,1,0)
z-akse: (x,y,z) = (0,0,0) + t(0,0,1)

PLANER

Der anvendes *ikke* parameterfremstillinger for planer i programmet, kun ligninger på formen
ax + by + cz + d = 0.
Kendes en parameterfremstilling med et fast punkt og to retningsvektorer for planen, kan ligningen findes ved hjælp af programpunkt 1.4: VEKTOR,... | 2 r-vektor + punkt.
Koordinatplanerne: xy-planen betår af punkter (x,y,0) og er karakteriseret ved z=0, hvilket mere klodset kan skrives 0x + 0y + 1z + 0 = 0.
I programmet kan koordinatplanernes ligninger ax+by+cz+d=0 indtastes med nedenstående koefficienter:

	a	*b*	*c*	*d*
XY-plan	0	0	1	0
XZ-plan	0	1	0	0
YZ-plan	1	0	0	0

DETALJERNE I D3GEO

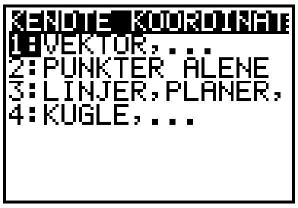
Programmets virkemåde beskrives gennem eksempler på løsning af opgaver.

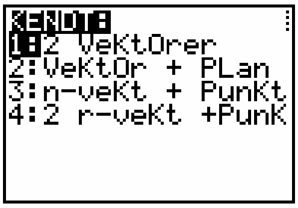
1. VEKTOR,....

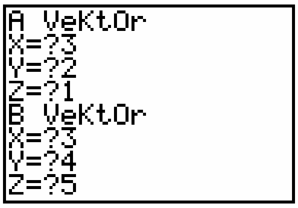
Opgave 1.1. **2 Vektorer**

Der er givet vektorerne ***a****=(3,2,1) og* ***b****=(3,4,5). Beregn* $\vec{a}\times\vec{b}$*, arealet af parallelogrammet udspændt af* ***a*** *og* ***b****, vinklen mellem* ***a*** *og* ***b****, og* ***a****'s projektion på* ***b***

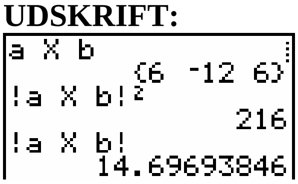
OPLYSNINGERNE INDTASTES:







UDSKRIFT:

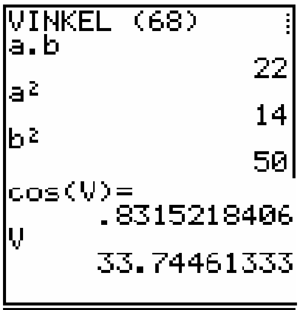


FORTOLKNING:

$\vec{a}\times\vec{b} = (3,2,1)\times(3,4,5) = (6,-12,6)$

Parallelogrammets areal:

$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{216} = 14{,}6969$

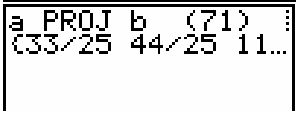


Til bestemmelse af vinklen, v, mellem ***a*** og ***b*** bestemmes

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 22$

$|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $\quad |\vec{b}| = \sqrt{50}$

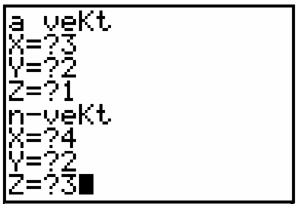
$\cos(v) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{22}{\sqrt{14}\sqrt{50}} = 0{,}8315$ hvoraf $v = 33{,}74°$



$\vec{a}_{\vec{b}} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \dfrac{22}{50}(3,4,5) = (\frac{33}{25}, \frac{44}{25}, \frac{11}{5})$ (= ***a***'s projektion på ***b)***

Opgave 1.2. **Vektor + Plan**

Beregn projektionen af ***a****=(3,2,1) på planen 4x+2y+3z-8=0.*



En normalvektor for planen er **n**=(4,2,3).

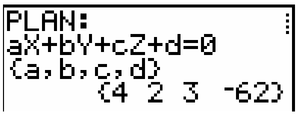
Denne bruges i formlen

$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2}\vec{n}$, og man får

vektoren $\left(\frac{11}{29}, \frac{20}{29}, -\frac{28}{29}\right)$

Opgave 1.3. **n-vektor + Punkt**

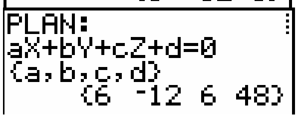
Find en ligning for planen vinkelret på vektoren (4,2,3) gennem punktet (6,7,8)



Idet normalvektoren ***n*** = (a,b,c)=(4,2,3) og punktet (x,y,z) =(6,7,8) opfylder planens ligning ax+by+cz+d=0, isoleres og beregnes d=-(ax+by+cz)= - 62 . Dvs. planen ligning er 4x+2y+3z – 62 = 0

Opgave 1.4 **2 r-vektorer + punkt**

Bestem en ligning for planen med parameterfremstillingen (x,y,z)=(6,9,4)+s(3,2,1)+ t(3,4,5)



Idet punktet (x,y,z) =(6,9,4) og normalvektoren ***n*** = (3,2,1) x (3,4,5) = (a,b,c) = (6,-12,6) opfylder planens ligning ax+by+cz+d=0, isoleres og beregnes d = - (ax+by+cz) = 48.

Planens ligning er derfor

6x -12y + 6z + 48 = 0.

(Den kan i øvrigt forkortes med 6 til x-2y+z+8=0)

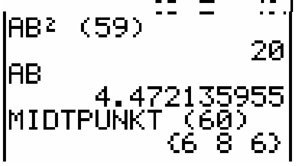
Specialtilfælde: Hvis de to retningsvektorer er parallelle, udspænder de ingen plan. Programmet udskriver

"PAA LINJE" . Prøv f. eks. (x,y,z) = (2,2,2) + s (1,0,0) + t (3,0,0)

2. PUNKTER ALENE

Opgave 2.1 **2 Punkter**

Punkterne A(6,7,8) og B(6,9,4) er givet.. Bestem en parameterfremstilling for linjen gennem A og B, beregn afstanden mellem de to punkter og find deres midtpunkt



Som retningsvektor kan bruges $\overrightarrow{AB} = (6,9,4) - (6,7,8) = (0,2,-4)$,

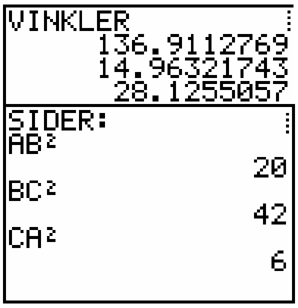
og som fast punkt A: $(x,y,z) = (6,7,8) + t\,(0,2,-4)$

Afstand: $|AB| = \sqrt{20} = 4{,}47$

Midtpunkt (6,8,6) (beregnet som ½[(6,7,8)+(6,9,4)]

Opgave 2.2 **3 Punkter**

Punkterne A(6,7,8) , B(6,9,4) og C(7,5,9) danner en trekant.. Beregn vinkler og sider i trekanten samt trekantens areal, og bestem en ligning for den plan, de tre punkter ligger i. Bestem desuden punktet, D, så firkanten ABCD er et parallelogram.



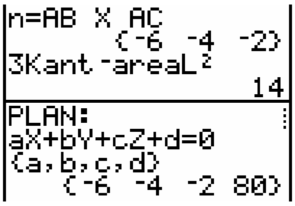
Vinklen $A = \cos^{-1}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$ = 136,91º, B = 14,96º,

C=28,13º

(brug evt. ”2 punkter” og ”2 vektorer” for mellemregninger)

Sidelængderne beregnes med afstandsformlen til

$|AB| = \sqrt{20}, \quad |BC| = \sqrt{42}, \quad |CA| = \sqrt{6}$



Idet $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \vec{n} = (-6,-4,-2)$ kan trekantens areal beregnes som det halve af denne vektors længde, og vi får arealet til $\sqrt{14}$.

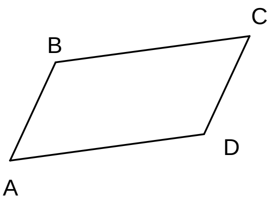
-

Idet punktet A=(x,y,z) =(6,7,8) og normalvektoren ***n*** = (a,b,c) = (-6,-4,-2) opfylder planens ligning ax+by+cz+d=0, isoleres og beregnes

D=-(ax+by+cz)= 80. Planens ligning er derfor

-6x -4y - 2z + 80 = 0.

-



Hvis ABCD er et parallelogram, er $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (se. figur).

Vi får heraf,

$(d_1, d_2, d_3) - (6,7,8) = (7,5,9) - (6,9,4)$

dvs.

$D = (d_1, d_2, d_3) = (7,3,13)$

Specialtilfælde: Hvis de tre punkter ligger på linje, er der uendelig mange forskellige planer, der indeholder de tre punkter. Programmet udskriver ”PAA LINJE”. Prøv f. eks. (2,0,0) , (3,0,0) og (5,0,0).

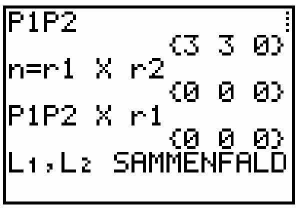
3. LINJER, PLANER, PUNKTER

Opgave 3.1 a **Linje + Linje** (sammenfaldende)

Bestem den indbyrdes beliggenhed og afstanden mellem de to linjer L_1 og L_2 med nedenstående parameterfremstillinger

L_1: (x,y,z)=(2,2,0) + t (1,1,0) *L_2: (x,y,z)=(5,5,0) + t (3,3,0)*

Betegnelser: Linjen L_1: $P_1 = (2,2,0)$, $\boldsymbol{r}_1 = (1,1,0)$; Linjen L_2: $P_2 = (5,5,0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (3,3,0)$



$\boldsymbol{r}_1$ og $\boldsymbol{r}_2$ er parallelle, idet deres krydsprodukt er beregnet til (0,0,0)

(Det ses også direkte at $\boldsymbol{r}_2 = 3\,\boldsymbol{r}_1$)

Desuden er $\overrightarrow{P_1P_2}$ = (3,3,0) parallel med $\boldsymbol{r}_1$ (kan igen ses af krydsproduktet $\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{r}_1 = (0,0,0)$ eller ses direkte)

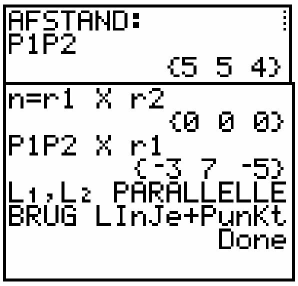
Derfor ligger P_2 på L_1 og dermed er L_1 og L_2 sammenfaldende

Afstanden er derfor 0.

Opgave 3.1 b **Linje + Linje** (parallelle)

Bestem den indbyrdes beliggenhed og afstanden mellem de to linjer L_1 og L_2 med nedenstående parameterfremstillinger

L_1: (x,y,z)=(1,2,4) + t (3,2,1) *L_2: (x,y,z)=(6,7,8) + t (6,4,2)*



$\boldsymbol{r}_1$ og $\boldsymbol{r}_2$ er parallelle, idet deres krydsprodukt er beregnet til (0,0,0)

(Det ses også direkte at $\boldsymbol{r}_2 = 2\,\boldsymbol{r}_1$)

$\overrightarrow{P_1P_2} = (5,5,4)$ er **ikke** parallel med $\boldsymbol{r}_1$ idet

$\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{r_1} = (-3,7,-5) \neq (0,0,0)$

P_2 ligger derfor ikke på L_1

Afstanden kan beregnes ved at finde afstanden fra P_2 til L_1

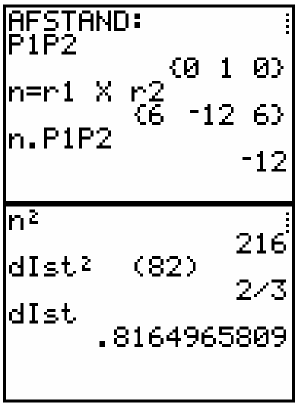
(I opgave 3.3 nedenfor er den beregnet til $\sqrt{\frac{83}{14}}$)

Opgave 3.1 c **Linje + Linje** (vindskæve)

Beregn afstanden mellem de to linjer med parameterfremstillingerne

(x,y,z) = (1,2,4) + t (3,2,1) og (x,y,z)=(1,3,4) + t (3,4,5)

Betegnelser: Linjen L_1: $P_1 = (1,2,4)$, $\boldsymbol{r}_1 = (3,2,1)$; Linjen L_2: $P_2 = (1,3,4)$, $\boldsymbol{r}_2 = (3,4,5)$



$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{r_2} = (3,2,1) \times (3,4,5) = (6, -12. 6)$

Da denne vektor ikke er (0,0,0) er linjerne ikke parallelle.

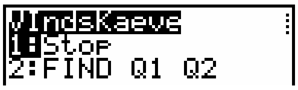
Idet $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,3,4) - (1,2,4) = (0,1,0)$ fås

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = -12$, og

$|\vec{n}| = \sqrt{216}$

Vi får nu - formel (82) -

$$dist(l_1, l_2) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-12|}{\sqrt{216}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816$$



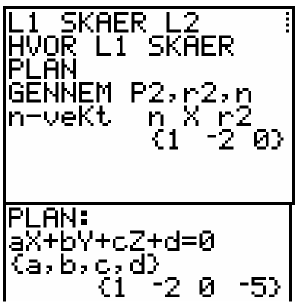
Da afstanden er større end 0 skærer linjerne ikke hinanden. De er vindskæve. (Om punkter Q_1 og Q_2 , se evt. side 12)

Opgave 3.1 d **Linje + Linje** (skærende)

Beskriv den indbyrdes beliggenhed og afstanden mellem de to linjer L_1 og L_2 med nedenstående parameterfremstillinger

L_1: (x,y,z)=(2,2,0) + t (1,1,0) *L_2: (x,y,z)=(5,0,0) + t (2,1,0)*

Efter mellemregninger svarende til opgave 3.1.c ovenfor, findes at linjerne ikke er parallelle, og at deres afstand er 0. Det betyder at linjerne skærer hinanden



Skæringspunktet S mellem L_1 og L_2 beregnes på en lidt speciel måde:

Planen gennem P_2 med retningsvektorerne $\boldsymbol{r}_2$ og $\boldsymbol{n}$ kaldes β.

β indeholder linjen L_2 og dermed også punktet S.

Da S ligger i både L_1 og i β, søger vi S, hvor L_1 skærer β.

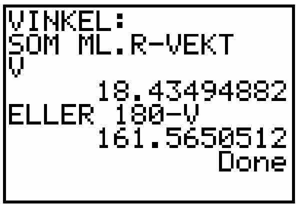
(Se evt. figur/model på sidste side i disse noter).

Som normalvektor for β kan bruges $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_2 = (1,-2,0)$ og da $P_2(5,0,0)$ ligger i β, får vi som ligning 1(x-5) – 2(y-0) +0(z-0)=0 d.v.s. x-2y-5=0

. . .

Metoden til at finde skæringspunkt mellem linje og plan (her L_1 og β) er forklaret nedenfor i opgave 3.2 (med andre tal).

I nærværende opgave findes efter nogle mellemregninger skæringspunktet (-5,5,0) som så også må være punktet S, hvor



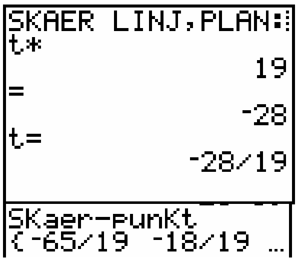
L_1 skærer L_2
Endelig beregnes vinklerne mellem de to skærende linjer L_1 og L_2:
Der er to vinkler, en spids og en stump. Den ene af dem findes som vinklen mellem de to retningsvektorer:

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{\left|\vec{r_1}\right|\left|\vec{r_2}\right|}\right) = 18{,}43°$$

Den anden er 180º-v = 180º-18,43º = 161,57º

Opgave 3.2 **Linje + Plan**

Find skæringspunktet mellem linjen, L, med parameterfremstillingen (x,y,z) = (1,2,4) + t (3,2,1) og planen med ligningen 4x+2y+3z+8 =0. Beregn desuden den spidse vinkel mellem linje og plan.

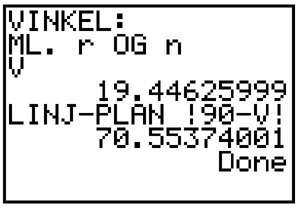


Linjens parameterfremstilling, x=1+3t, y=2+2t, z=4+t, indsættes i planens ligning, 4x+2y+3z+8 =0, og vi bestemmer t:
4(1+3t) + 2(2+2t)+3(4+t)+8 = 0
19 t = -28

$t = -\frac{28}{19}$

Da der er én løsning er der ét skæringspunkt, og det findes ved at indsætte t=-28/19 i linjens parameterfremstilling.
Skæringspunktet bliver

$\left(-\frac{65}{19}, -\frac{18}{19}, \frac{48}{19}\right)$



Vinklen mellem linjens retningsvektor, ***r***=(3,2,1) og planens normalvektor ***n*** = (4,2,3) bestemmes først:

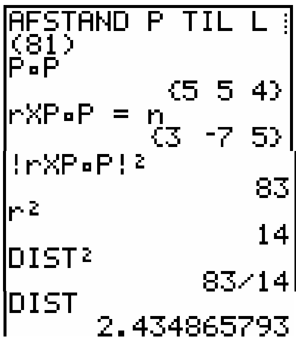
$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{r}\right|\left|\vec{n}\right|}\right) = 19{,}4°$$

Den spidse vinkel mellem linje og plan er |90º – v| = 90º – 19.4º = 70,5º

Specialtilfælde: Hvis ***n·r*** = 0, ligger linjen i planen, eller også er linjen parallel med planen. I begge tilfælde udskriver programmet "PARALLELLE. BRUG Plan + Punkt". Med menupunktet Plan+Punkt (se opgave 3.5 nedenfor) kan man beregne afstanden fra linjens faste punkt til planen. Det er den samme som afstanden fra linjen til planen.
Hvis afstanden er 0 ligger linjen i planen. Prøv f. eks. planen z=0 dels sammen med x-aksen (x,y,z)= (0,0,0)+t(1,0,0) dels sammen med linjen (x,y,z) = (0,0,5) + t (1,0,0)

Opgave 3.3 **Linje + Punkt**

Der er givet en linje , L : (x,y,z) = (1,2,4) + t (3,2,1) og punktet P(6,7,8). Beregn afstanden fra P til L og find P's projektion på linjen L. Bestem desuden en ligning for den plan der indeholder L og P.



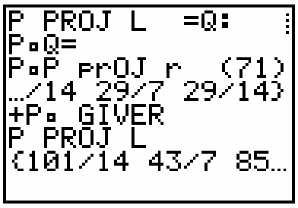
Til linjen hører $P_o(1,2,4)$ og ***r***=(3,2,1). Vi finder

$\overrightarrow{P_0P} = (5,5,4)$ *og*

$\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} = \vec{n} = (3,-7,5)$, *hvoraf*

$\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right| = \sqrt{83}$ *og* $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{14}$

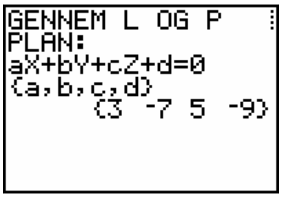
$$dist(P,L) = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{83}{14}} = 2{,}43$$



Punktet P's projektion på linjen L kaldes Q, og dette punkt skal bestemmes.
Idet $\overrightarrow{P_0Q}$ er projektionen af $\overrightarrow{P_0Q}$ på $\boldsymbol{r}$ fås - formel (71) -

$$\overrightarrow{P_0Q} = \frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{r}}{\vec{r}^{\,2}}\vec{r} = \left(\tfrac{87}{14},\tfrac{27}{7},\tfrac{29}{14}\right),\ \textit{som lagt } P_0\textit{'s koordinatsæt giver}$$

$$Q = \left(\tfrac{101}{14},\tfrac{43}{7},\tfrac{85}{14}\right)$$



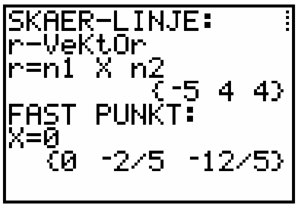
Ovenfor fandt vi $\vec{r}\times\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{n} =$ (3,–7,5) , som må være normalvektor, (a,b,c), til planen gennem L og punktet P=(x,y,z)=(6,7,8) . Af ax+by+cz+d = 0 isoleres og beregnes d=-(ax+by+cz) =-9, så ligningen kan skrives

3x – 7y + 5z - 9 = 0

Specialtilfælde: Hvis punktet P ligger på linjen L, beregnes afstanden til 0, projektionen bliver punktet P selv, en plan gennem L og P er ikke veldefineret (der findes uendelig mange), og programmet udskriver ”PAA LINJE” .
Prøv f.eks. med x-aksen: (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,0,0) og punktet P = (5,0,0)

Opgave 3.4 **Plan + Plan**

Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planerne 4x + 2y +3z + 8 = 0 og 4x +3y + 2z + 6 = 0. Beregn desuden vinklen mellem de to planer.



Da normalvektorernes krydsprodukt (4,2,3) x (4,3,2) = (-5, 4, 4) **ikke** er (0,0,0) er normalvektorerne ikke parallelle, og dermed er planerne heller ikke parallelle. De skærer derfor hinanden i en linje.
Skæringslinjens retningsvektor, ***r***, må være vinkelret på såvel den ene plans normalvektor, som den andens.
Krydsproduktet ***r*** = (4,2,3) x (4,3,2) = (-5, 4, 4) kan således bruges som retningsvektor.
Som fast punkt søger vi ét der foruden de to ligninger opfylder x=0. Ved løsning af to ligninger med to ubekendte findes y=-2/5 , z= -12/5, altså (0, -2/5, -12/5)
Parameterfremstilling: (x,y,z)= (0, -2/5, -12/5) + t (-5, 4, 4)
-

Vinklen, v, mellem de to normalvektorer , $\boldsymbol{n}_1$ og $\boldsymbol{n}_2$ er

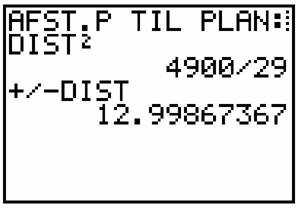
$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right) = 15{,}09°$$

Dette er samtidig den ene (her den spidse) vinkel mellem planerne.
(Den stumpe er 180º – v = 164,91º)

Bemærkning: Hvis den beregnede retningsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ har 0 som første-koordinat, nytter det normalt ikke at sætte x=0, når et fast punkt skal bestemmes. I stedet bruges y=0 eller z=0. Find f. eks. skæringslinjen mellem planerne x-2y+z+2=0 og 2x+2y-z+3=0.
Specialtilfælde: Hvis det beregnede krydsprodukt $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ bliver (0,0,0) , er normalvektorerne parallelle, og dermed er også planerne parallelle, eventuelt sammenfaldende. Programmet udskriver ”PARALLELLE. BRUG Plan+Punkt”
Ved at vælge et punkt i den ene plan, og beregne dets afstand til den anden plan (se opgave 3.5 nedenfor), får man planernes indbyrdes afstand, og ud fra den kan man konstatere, om planerne er sammenfaldende eller parallelle.
Prøv f.eks. med planerne x + y +z + 1 = 0 og 3x + 3y + 3z + 17 = 0.
Hvis man ikke let ved hovedregning kan udvælge et punkt i den ene plan, så se opg. 3.6 nedenfor, hvor en plans skæring med akserne beregnes.

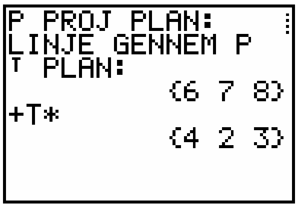
Opgave 3.5 **Plan + Punkt**

Givet planen med ligningen 4x + 2y +3z + 8 = 0 og punktet P(6,7,8).
Beregn afstanden fra P til planen, og bestem P' s projektion på planen.

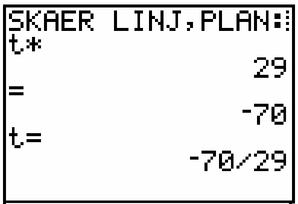


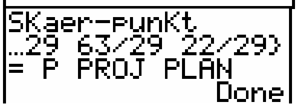
Afstanden fra punkt til planudregnes ved at indsætte (a,b,c,d)=(4,2,3,8)
og $(x_1, y_1, z_1) = (6,7,8)$ i formlen (78):

$$dist(P, plan) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{4900}{29}} = 12.999$$



For at projicere P på planen, betragter vi den linje, L, der går gennem P(6,7,8), og hvis retningsvektor er planens normalvektor ***n***=(4,2,3).
L' s parameterfremstilling er altså (x,y,z)=(6,7,8) + t (4,2,3)
Projektionen er L' s skæringspunkt med planen. For at finde dette indsættes linjens parameterfremstilling i planens ligning:
4 (6+4t) + 2 (7+2t) + 3 (8+3t) + 8 = 0



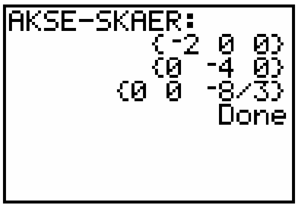


Ligningen reduceres til
29 t = - 70
som har løsningen
$t = -\frac{70}{29}$. Denne løsning indsættes i linjens parameterfremstilling, og vi får
Skæringspunktet $\left(-\frac{106}{29}, \frac{63}{29}, \frac{22}{29}\right)$, som altså er projektionen af P på den opgivne plan.

Specialtilfælde: Hvis punktet P ligger i planen, bliver afstanden beregnet til 0, og projektionen bliver punktet P selv. Prøv. f.eks. med planen z=0 og punktet P(5,6,0)
Bemærkning om fortegn: En afstand er altid positiv. Men i programmet udskives afstanden sammen med et fortegn, idet teksten er "±DIST" og det udskrevne tal er beregnet uden numerisk-tegnet i formlens tæller. Det betyder at punkter på den ene side af planen får udskrevet en positiv værdi, mens punkter på den anden side får udskrevet en negativ værdi. Sådan er det lavet fordi man somme tider har brug for at vide om to punkter ligger på samme side eller på modsat side af en plan.

Opgave 3.6 **Plan (+akser)**

Givet planen med ligningen 4x + 2y +3z+ 8 = 0.
Beregn planens skæringspunkter med de tre koordinatakser.



x-aksen består af punkter af formen (x,0,0)
Planens skæring med x-aksen findes ved at sætte y=0 og z=0 i planens ligning:
a·x + b·0 + c·0 + d = 0, dvs. a·x+d=0, som giver x=-d/a, altså skæringspunktet (-d/a, 0, 0) = (-8/4 , 0, 0) = (-2,0,0) med de aktuelle tal.
Tilsvarende findes skæringspunktet
med y-aksen: (0,-d/b, 0) = (0,-4,0),
og med z-aksen: (0,0, -d/c) = (0,0, -8/3)

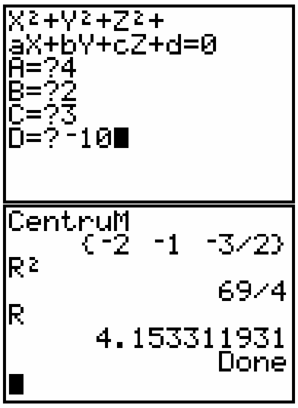
Specialtilfælde: Hvis a, b eller c er lig nul, er den tilsvarende akse enten parallel med planen (hvis d≠0), eller indeholdt i planen (hvis d=0). Programmet udregner kun de regulære skæringspunkter, og er ikke til meget hjælp, hvis både d og en af de andre koefficienter er 0. Prøv f.eks. x+2y+3=0 henholdsvis x+2y=0.

4. KUGLER,...

Opgave 4.1 **Ligning**

En kugle har ligningen $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 3z - 10 = 0$

Beregn kuglens radius og koordinatsættet for dens centrum



Ligningen $x^2 + y^2 + z^2 + a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z + d = 0$
kan omskrives til

$$(x+\tfrac{a}{2})^2 + (y+\tfrac{b}{2})^2 + (z+\tfrac{c}{2})^2 = \tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) - d$$

Hvis højre-siden er negativ, opfylder ingen punkter ligningen.
Ellers er der tale om en kugle med centrum

C = $\left(-\tfrac{a}{2}, -\tfrac{b}{2}, -\tfrac{c}{2}\right)$ og radius $R = \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) - d}$

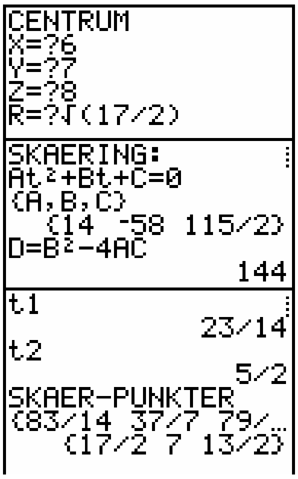
Med de aktuelle tal fås:
C= (-2, -1, -3/2) og
R= $\sqrt{\tfrac{69}{4}} = 4.15$

Specialtilfælde: Hvis den beregnede R=0 er der blot et punkt, nemlig C, der tilfredsstiller ligningen. Hvis udtrykket ¼$(a^2 + b^2 + c^2) - d$ giver et negativt resultat, opfylder ingen punkter ligningen, og programmet udskriver ”TOM”. Prøv f.eks. $x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot x + 2\cdot y + 2\cdot z + 3 = 0$ henholdsvis $x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot x + 2\cdot y + 2\cdot z + 4 = 0$

Opgave 4.2 **C + R + Linje**

En kugle har centrum (6,7,8) og radius $\sqrt{\tfrac{17}{2}}$

Beregn hvor linjen med parameterfremstillingen (x,y,z) = (1,2,4) + t (3,2,1) skærer denne kugle



Linjens parameterfremstilling, x=1+3t, y=2+2t, z=4+t indsættes
i kuglens ligning, der reduceres.

$(x - 6)^2 + (y - 7)^2 + (z - 8)^2 - 17/2 = 0$

$((1 + 3\cdot t) - 6)^2 + ((2 + 2\cdot t) - 7)^2 + ((4 + t) - 8)^2 - 17/2 = 0$
$(3\cdot t - 5)^2 + (2\cdot t - 5)^2 + (t - 4)^2 - 17/2 = 0$
$(9\cdot t^2 - 30\cdot t + 25) + (4\cdot t^2 - 20\cdot t + 25) + (t^2 - 8\cdot t + 16) - 17/2 = 0$
$14\cdot t^2 - 58\cdot t + 115/2 = 0$

Denne andengradsligning har løsningerne t=23/14 og t=5/2, og
når disse indsættes i linjens parameterfremstilling fås de to
skæringspunkter:

$\left(\tfrac{83}{14}, \tfrac{37}{7}, \tfrac{79}{14}\right)$ *og* $\left(\tfrac{17}{2}, 7, \tfrac{13}{2}\right)$

Specialtilfælde 1: Hvis kuglens radius er mindre end afstanden fra centrum til linjen, skærer linjen ikke kuglen.
Det viser sig ved at den udskrevne diskrimininant $D=B^2-4AC$ får negativ værdi. Prøv f. eks. at ændre radius til 2 i eksemplet ovenfor.
*Specialtilfælde 2:*Hvis kuglens radius er lig med afstanden fra centrum til linjen, tangerer linjen kuglen.
Det viser sig ved at den udskrevne diskrimininant $D=B^2-4AC$ bliver 0, andengradsligningen har kun én løsning og kugle og linje har kun ét punkt fælles, ”røringspunktet”. (Programmet udskriver to ens punkter). Prøv at ændre kuglens radius til R=$\sqrt{\tfrac{83}{14}}$ i eksemplet ovenfor (dette tal er beregnet i opgave 3.4).

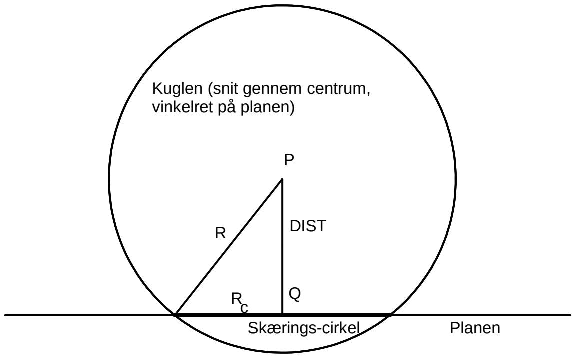
Opgave 4.3 **C + R + Plan**

Der er givet kuglen med centrum P=(6,7,8) og radius R=15, samt planen med ligningen 4x+2y+3z+8 = 0

Beregn radius og centrum for skærings-cirklen

Afstanden fra centrum, P , til planen findes (se opgave 3.5) DIST = $\sqrt{\frac{4900}{29}}$

Ved hjælp af Pythagoras findes radius R_c i skæringscirklen



$$R_c^{\ 2} = R^2 - DIST^2 = 15^2 - \frac{4900}{29} = \frac{1625}{29}$$

$$R_c = \sqrt{\frac{1625}{29}} = 7{,}486$$

...

Skæringscirklens centrum, Q, er projektionen af kuglens centrum, P, på planen. Efter mellemregninger (se opgave 3.5) fås Q = $\left(-\frac{106}{29}, \frac{63}{29}, \frac{22}{29}\right)$

Specialtilfælde 1: Hvis kuglens radius er mindre end afstanden fra centrum til planen, skærer planen ikke kuglen.

Prøv f. eks. at ændre radius til 10 i ovenstående eksempel.

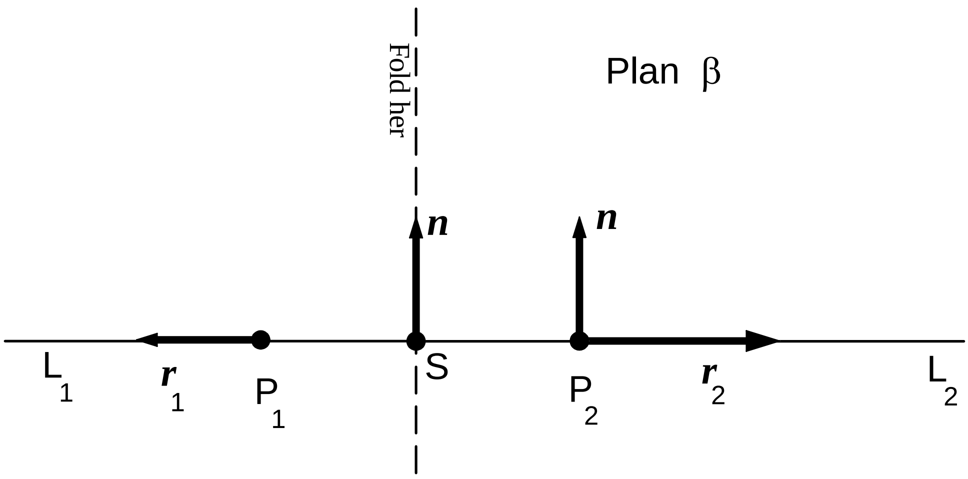
Specialtilfælde 2: Hvis kuglens radius er lig med afstanden fra centrum til planen, tangerer planen kuglen.

Det viser sig ved, at programmet udregner skæringscirklens radius til 0. Det som programmet udskriver som "cirkelcentrum" er i dette tilfælde røringspunktet, hvor planen tangerer kuglen.

Prøv at ændre kuglens radius til R=$\sqrt{\frac{4900}{29}}$ i ovenstående eksempel.

Vedr. Opgave 3,1 d (skærende linjer)

Ved at folde langs den stiplede linje får man en rumlig model, der illustrerer, at skæringspunktet, S, mellem linjerne
L_1 og L_2 er det samme som skæringspunktet mellem L_1 og planen β
(Plan β går gennem P_2 med retningsvektorer $\mathbf{r}_2$ og $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Efter foldning er β højre halvdel af papiret.)



Vedr. Opgave 3.1. c (vindskæve linjer)

Når L_1 og L_2 er vindskæve, kan man finde to punkter Q_1 og Q_2 på hver sin linje, så $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ er vinkelret på både L_1 og L_2 . Afstanden mellem Q_1 og Q_2 er den korteste afstand mellem L_1 og L_2 .
Q_1 bestemmes i programmet som skæringspunktet mellem L_1 og planen β
(Plan β går gennem P_2 med retningsvektorer $\mathbf{r}_2$ og $\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$. Efter foldning er β højre halvdel af papiret.)
Programmet beregner derefter Q_2 idet vektoren $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ er projektionen af vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ på **n**
Den stiplede linje gennem Q_1 og Q_2 siges at være "den fælles normal" for de to vindskæve linjer L_1 og L_2.